Tobias Holck Colding modtog Carlsbergfondets Forskningspris 2016

Tobias Holck Colding er professor ved Massachusetts Institute of Technology (MIT) og adjungeret professor ved Institut for Matematiske Fag på Københavns Universitet.

Tobias Holck Colding har løst flere markante problemer i matematikken. Han arbejder indenfor et af de mest betydningsfulde forskningsområder i matematikken: differentialgeometri og geometrisk analyse, som drejer sig om samspillet mellem geometri og differentialligninger. Interessen for dette område er eksploderet de seneste 5–10 år.

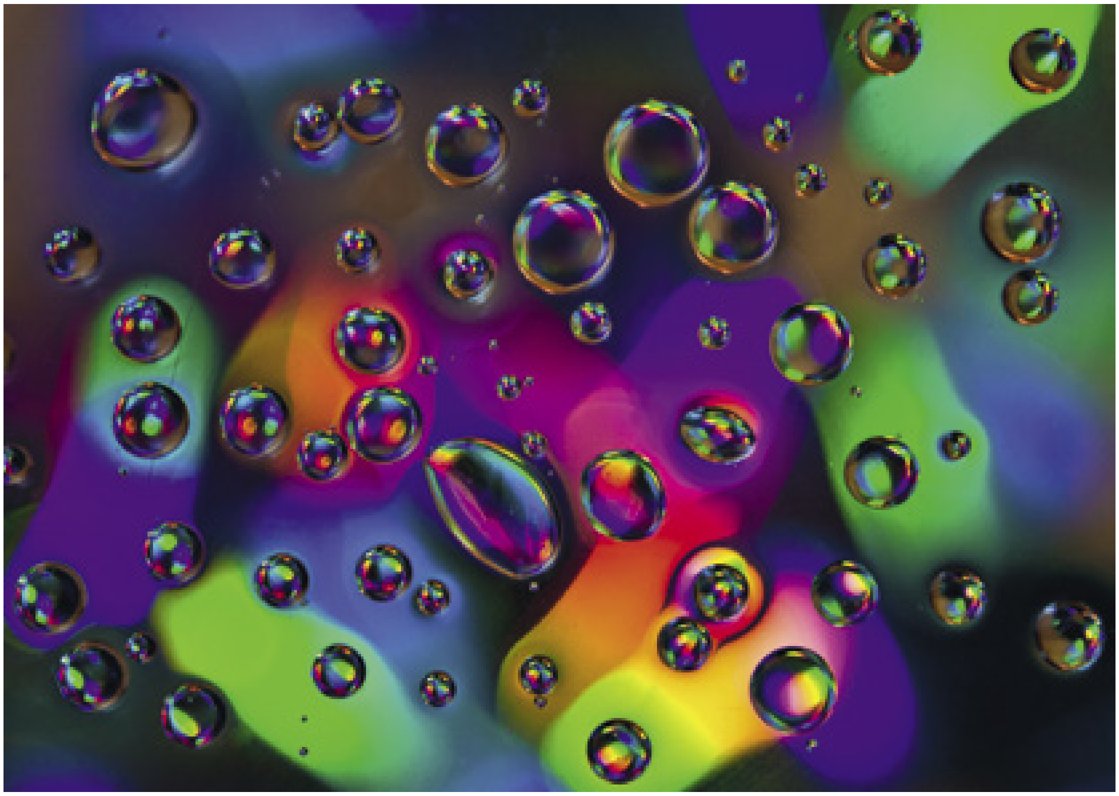
Tobias Holck Colding har desuden arbejdet indgående med den såkaldte Ricci-krumning og harmoniske funktioner, og han har karakteriseret de mulige former, som minimalflader kan have.

2

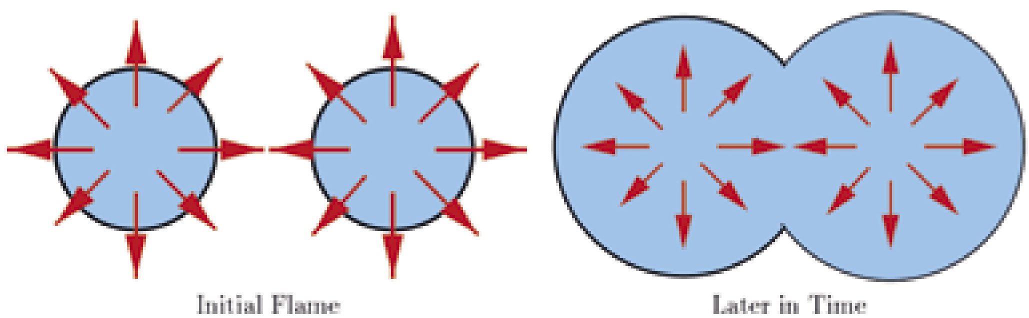
NÅR FORMER ÆNDRER SIG

Af
TOBIAS HOLCK COLDING
PROFESSOR, PH.D.
MASSACHUSSETS INSTITUTE OF TECHNOLOGY (MIT)
OG ADJ. PROFESSOR VED INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG, KØBENHAVNS UNIVERSITET

I naturen er former typisk enten i balance og forbliver uændrede eller påvirkede af kræfter og udvikler sig over tid. Hvis de udvikler sig, vil man gerne vide, om man kan forudse, hvad der vil ske. Hvilke ændringer vil der ske over tid? Vil balance forekomme ved et senere tidspunkt? osv. Når man laver modeller for alle mulige forskellige fysiske fænomener, såsom krystaller, der udvikler sig, eller skovbrande, er det naturligt at følge grænser, der bevæger sig med hastighed, der afhænger af krumning. Når hastigheden er overfladespændingen (middelkrumning), så fører det til en af de klassiske ikke-lineære differentialligninger.



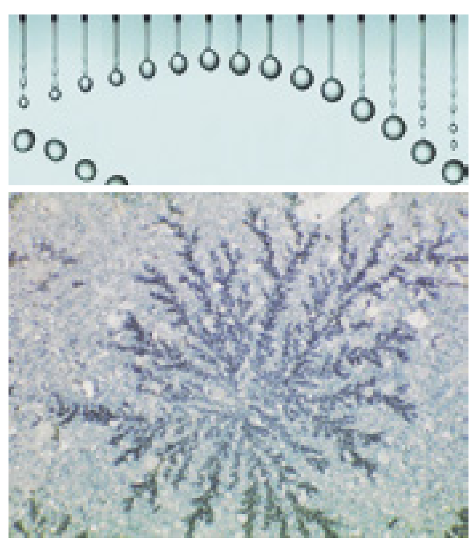
Figur 1
Oliedråber på vand kan modelleres ved "level set-metoden".



Figur 2
Efter at to brande forenes, er omkredsen af branden sammenhængende.
Illustration: James Sethian.

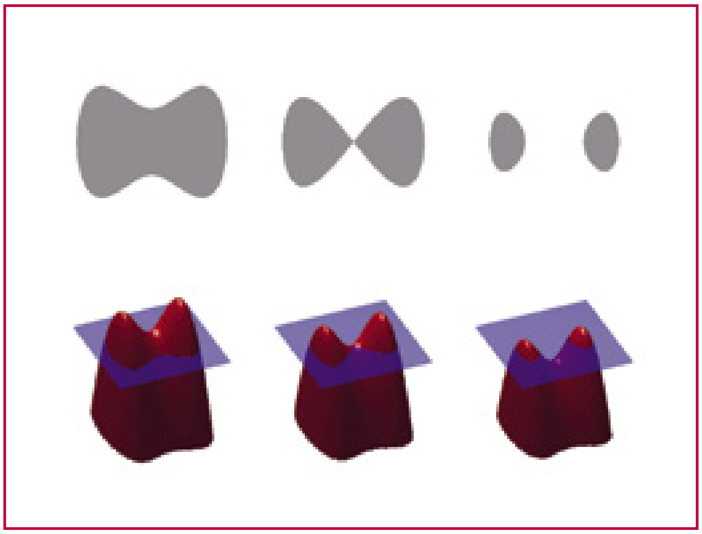
En skovbrand, der breder sig, et krystal, der vokser, en airbag, der udløses, og en dråbe, der flyder oven på vand som i Figur 1, kan alle beskives ved såkaldte "level set method". En af de udfordringer, der er ved at modellere ting, er, når diskontinuitet indtræffer. For eksempel kan to adskilte brande brede sig, indtil de mødes og forenes som i Figur 2, eller en dråbe kan dele sig som i Figur 3. "Level set-metoden" er blevet brugt med stor succes de sidste 30 år i både ren og anvendt matematik. For en given grænse eller omkreds, som begrænser et område i rummet, er "level set-metoden" brugt til at analysere, hvad der sker under videre udvikling.

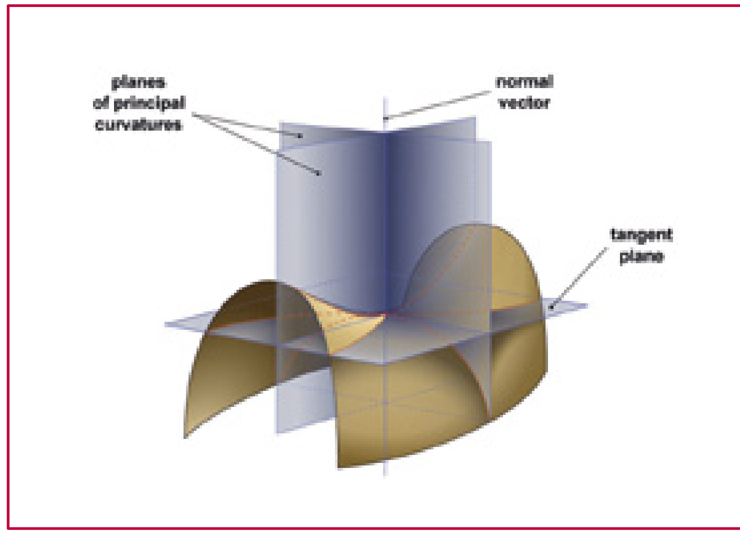
I mange anvendelser vil bevægelsen blive ved med at gå i den samme retning og omkredsen enten bevæge sig indad eller udad. Dette er f.eks. tilfældet



Figur 3
Dråber, der falder, og krystaller, der udvikler sig, kan analyseres som grænser, der bevæger sig.
Den første illustration er udført af Christian Clasen, J. Bico, Gareth McKinley og Vladimir Entov, J. Fluid Mech (2009).

> *Differentialligninger kan bruges til at modellere alle mulige forskellige fysiske fænomener, der udvikler sig over tid.*





Figur 4
De grå områder repræsenterer træer, som branden endnu ikke er nået til. Kanten er, hvor branden er. Kanten bevæger sig indad, som tiden går, fra venstre til højre i den øverste del af illustrationen.
De tre farvede figurer i den anden linje er en tredimensionel (topografisk) illustration af branden, hvor højden svarer til ankomsttiden.

Figur 5
I denne illustration er overfladen brun. Planen, som tangerer fladen i et punkt, er illustreret. Middelkrumningen i samme punkt er gennemsnittet af krumningen af alle kurver, som kan fås ved at kigge på den del af overfladen, der er i et plan, der møder fladen vinkelret i det givne punkt. I illustrationen er to af de kurver markeret i rødt (ligesom den del af fladen, der er i tangent-planen).

ved en skovbrand: Branden vender aldrig tilbage til et område, der allerede er udbrændt. Vi vil fokusere på de situationer, hvor dette er tilfældet, da det er nemmere at beskrive. For eksempel hvis omkredsen altid bevæger sig indad i det område, den begrænser, så vil det typisk gælde, at den over tid passerer alle punkter i det indre af området. I dette tilfælde er ”level set-metoden” den enkle idé, at i stedet for at analysere den bevægende omkreds, så analyserer man, hvornår omkredsen er ankommet hvor. Det svarer til topografiske kort, hvor koter er tegnet, der markerer, hvor en given højde er. Vandoverfladen svarer til koten, der markerer nul meters højde over vandets overflade. På samme måde svarer punkterne, hvor ankomsttiden er nul til, hvor den oprindelige omkreds var, se Figur 4.

I ”mean curvature flow” er hastigheden af bevægelsen middelkrumningen. Middelkrumningen er typisk forskellig fra punkt til punkt på en flade, og derfor varierer hastigheden af fladens bevægelse sig fra punkt til punkt. Middelkrumningen i et punkt på en flade er den gennemsnitlige krumning i det punkt, se Figur 5. I fysik er middelkrumningen normalt omtalt som overfladespænding, se Figur 6. En flade bevæger sig som nævnt ved ”mean curvature flow”, hvis den hastighed, den bevæger sig ved, er middelkrumningen.

To vigtige egenskaber:
- ”Mean curvature flow” af en flade er karakteriseret ved, at fladen bevæger sig, således at arealet hurtigst muligt formindskes.
- To flader, der er adskilte, vil forblive adskilte, mens de udvikler sig.

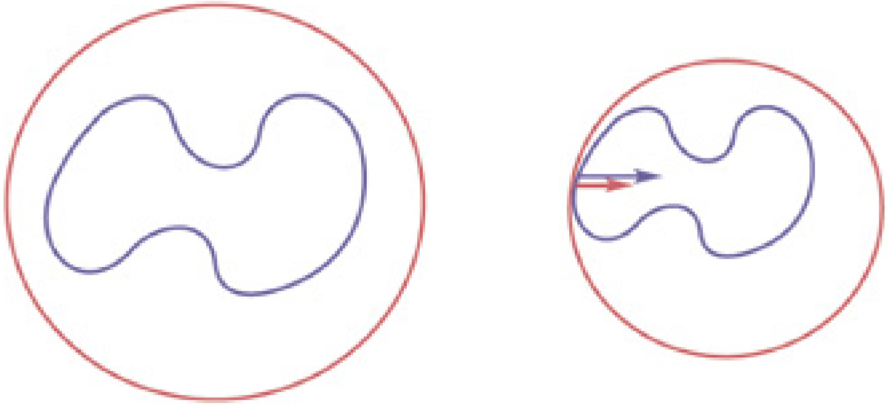
Differentialligningen

Ankomsttiden v opfylder en klassisk ikke-lineær, degenereret differentialligning

$$-1 = |\nabla v| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\right).$$

Denne differentialligning er degenereret elliptisk, udefineret når gradienten af v er lig nul, dvs. $\nabla v =$ 0. Det har længe været uklart, om denne ligning har klassiske løsninger.

I en meget citeret artikel af Osher og Sethian fra 1988 studerede de denne differentialligning numerisk. Den analytiske teori omkring den var lavet af Evans og Spruck i begyndelsen af 1990’erne og uafhængigt, men på samme tid, af Chen, Giga og Goto. Da det var uklart, om der fandtes klassiske løsninger, brugte begge grupper en måde, der var udviklet i 1980’erne af Lions and Crandall, til at definere løsninger til differentialligninger i en udvidet



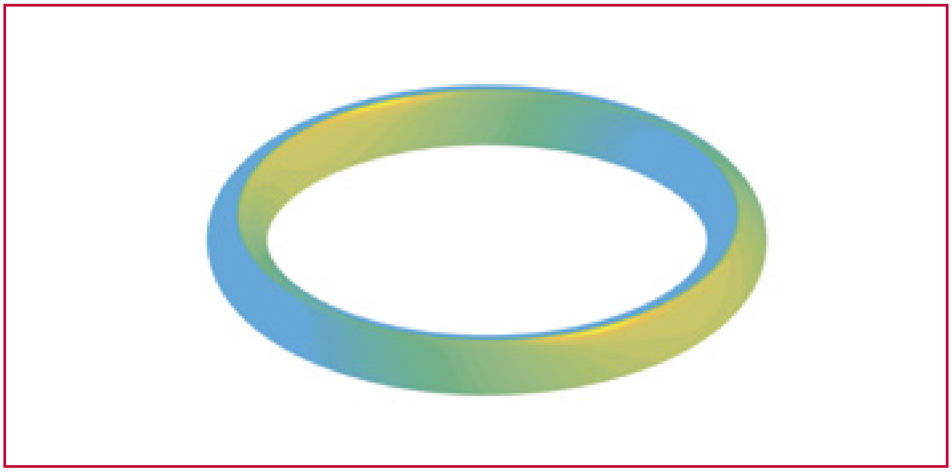
Figur 6
Fysisk er middelkrumning det samme som overfladespænding.

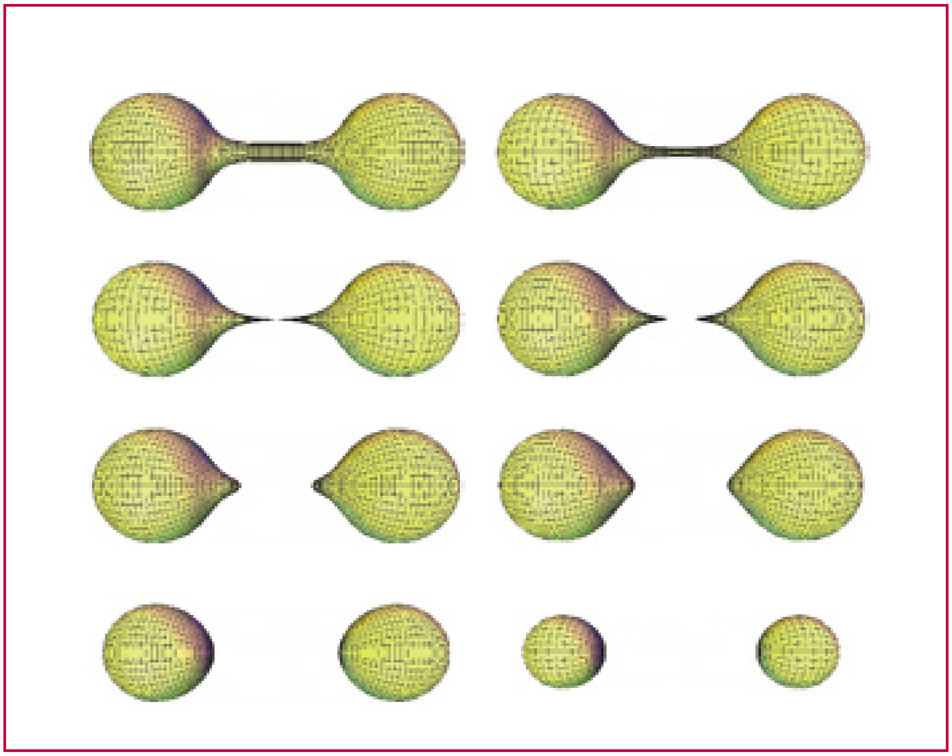
Figur 7
Hvis to flader er adskilte til at begynde med, så vil de forblive adskilte, efterhånden som de udvikler sig. Hvis det ikke var tilfældet, ville det stride mod den oprindelige antagelse, at de var adskilte i begyndelsen.

Figur 8
Forlovelsesringen trække sig sammen til en cirkel, når den udvikler sig ved ”mean curvature flow”.

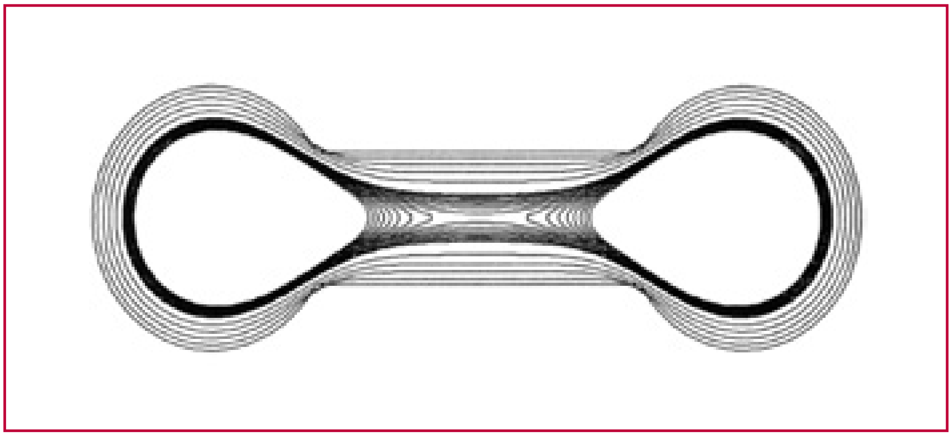
Figur 9
Denne illustration er lavet af Uwe Mayer og brugt med hans tilladelse. Det er en computersimulation af, hvad der sker, når en vægtløftningsstang udvikler sig. Den tynde stang mellem de to kugler forsvinder først, hvorefter begge kugler bliver runde, inden de også forsvinder.

Figur 10
Denne illustration er af et tværsnit af samme vægtløftningsstang, når den udvikler sig ved ”mean curvature flow”. Kurverne er tværsnittet af stangen ved forskellige tidspunkter. Illustration: James Sethian.





En singularitet er et punkt i rum og tid, hvor fladen ikke længere er glat.



Det viser sig overraskende, at løsninger altid er to gange differentierbare og opfylder denne differentialligning i en klassisk forstand.

forstand. Denne anvendelse af Lions og Crandalls kendte arbejde var regnet for at være en af Lions og Crandall-teoriens største succeser. Eksempler på singulariteter: Ved "mean curvature flow" forbliver en rund sfære rund, mens den trækker sig sammen og til sidst forsvinder i et punkt. En rund cylinder forbliver rund, inden den forsvinder i en linje, mens forlovelsesringen forsvinder i en cirkel.

Vægtløftningsstang
Ilustrationen i Figur 9 viser udviklingen af en flade, der har form som en vægtløftningsstang. Hvis stangen er tynd, så vil den forsvinde først, og fladen bliver usammenhængende. Senere vil hver af de to kugler forsvinde, men lige inden det sker, bliver de helt runde.

Singulariteterne
Ved "mean curvature flow" trækker en flade sig sammen og udvikler singulariteter, hvor fladen ikke mere er glat og forsvinder til sidst. En singularitet er et punkt i rum og tid, hvor fladen ikke længere er glat.

I de første tre eksempler – sfæren, cylinderen og forlovelsesringen – er singulariteterne henholdsvis et punkt (sfærens centrum), en linje (cylinderens centrum) og en cirkel. I hvert enkelt tilfælde sker singulariteterne på et bestemt tidspunkt. I eksemplet med en vægtsløftningsstang er der to tidspunkter, hvor fladen er singulær. Ved det første singulære tidspunkt er der en enkelt singularitet, mens der ved det andet er to.

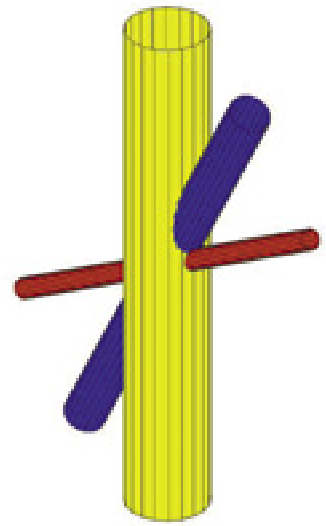
Vi har set, at former, der ændrer sig, kan beskrives ved "level set-metoden". Den enkle idé er, at man i stedet for at fokusere på, hvad der sker over tid med omkredsen, prøver man at analysere ankomsttiden. Ankomsttiden er den tid, det tager omkredsen at nå til et givent punkt. Denne idé har været utrolig anvendelig, og en omfattende teori er lavet ved fælles indsats af mange forskere over mange år. På trods af dette forblev mange basale spørgsmål ubesvarede. For eksempel ville man gerne vide, hvor differentierbar ankomsttiden er. Den løser en differentialligning, men kun i en generaliseret forstand.

Når former ændrer sig på grund af overfladespænding, får man en af de klassiske ikke-lineære differentialligninger. Der er skrevet tusinder af artikler om den, og i en række berømte afhandlinger fra omkring 1990 lykkedes det forskellige grupper af forskere at fortolke, hvad det vil sige at løse denne differentialligning, selvom man kun kunne vise, at disse var kontinuerte. Det viser sig overraskende, at løsninger altid er to gange differentierbare og opfylder denne differentialligning i en klassisk forstand. Dette er blevet bevist inden for det sidste par år af forfatteren i samarbejde med Bill Minicozzi. Resultatet er optimalt. Beviset kæder flere matematiske områder sammen og viser, at klassiske differentialligninger kun kan forstås fuldstændigt, hvis man forstår geometrien, der ligger bag; se [CM].

Lidt om beviset
En måde at vise, at en funktion er differentiabel i et punkt, er at vise, at tæt på det punkt er forskellen mellem den givne funktion og en lineær funktion lille (bortset fra en lille lineær afvigelse). På samme måde er en funktion to gange differentierbar i et punkt, hvis den ikke bare er tæt på en lineær funktion, men er tæt på et kvadratisk polynomium, pånær en meget lille afvigelse (meget mindre afvigelse end i det linære tilfælde). Tæt på et singulært punkt kan man vise, at hvis man forstørrer fladen, så ligner den nogenlunde en cylinder. Det forhindrer ikke, at fladen endnu tættere på det singulære punkt kunne ligne en helt anden cylinder. At den ligner den samme cylinder, uafhængigt af hvor tæt man er på det kritiske punkt, er nøglen til at vise, at funktionen er to gange differentierbar. Denne entydighed er kendt for at være et specielt vanskeligt problem. Beviset udnytter en helt ny slags ulighed.

Se artiklerne [CM] og [CMP] for yderligere læsning om "level set-method"og "mean curvature flow".

Litteratur
[CM] T.H. Colding and W.P. Minicozzi II, *Level Set Method for motion by mean curvature*, Notices of the AMS, (2016) Vol. 63, No. 10, 1148–1153. • [CMP] T.H. Colding, W.P. Minicozzi II, and, E.K. Pedersen, *Mean curvature flow*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 52 (2015), no. 2, 297–333.



Figur 11
Denne figur illustrerer en situation, som viser sig ikke at eksistere. I den er akserne ved tre forskellige tider tæt på det singulære punkt vidt forskellige. I virkeligheden viser det sig, at fladen tæt på det singulære punkt, i forstørrelse vil ligne en enkelt cylinder og ikke ændre sig nævneværdigt, efterhånden som man kommer tættere på det singulære punkt. At dette er tilfældet, er nøglen til at vise, at funktionen er to gange differentierbar. Denne slags entydighed er kendt inden for matematikken for at være et specielt vanskeligt spørgsmål. For første gang er det lykkedes at vise det generelt.